Olympiadeklassen **11–12**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

611211

Die positiven ganzen Zahlen a, b, c und d haben die folgenden vier Eigenschaften:

(1) a und c sind Primzahlen.

(2) c und d unterscheiden sich um genau 1.

(3) a, b, c erfüllen die Gleichung $a \cdot b + 1 = c$.

(4) b, c, d erfüllen die Gleichung $b \cdot d + 1 = b \cdot c + 6$.

Man berechne die Zahl $(b \cdot d + 1) \cdot 10\,000 + d \cdot 100 + c$.

611212

Für eine natürliche Zahl n werden alle Möglichkeiten betrachtet, n rote und n schwarze Kugeln in einer Reihe anzuordnen. Zwei Anordnungen werden dabei als gleich angesehen, wenn auf den Plätzen „1“, „2“, …, „$2n$“ jeweils die Farben der Kugeln übereinstimmen.

Man beweise, dass die Anzahl dieser Anordnungen durch $(n + 1)$ teilbar ist.

611213

Es seien a und b zwei gegebene reelle Zahlen mit $|a| \neq |b|$. Wir betrachten das folgende Gleichungssystem für die reellen Unbekannten x und y:

$$x + |y| = a\,,$$
$$|x| + y = b\,.$$

Man bestimme alle Lösungspaare (x, y) in Abhängigkeit von a und b.

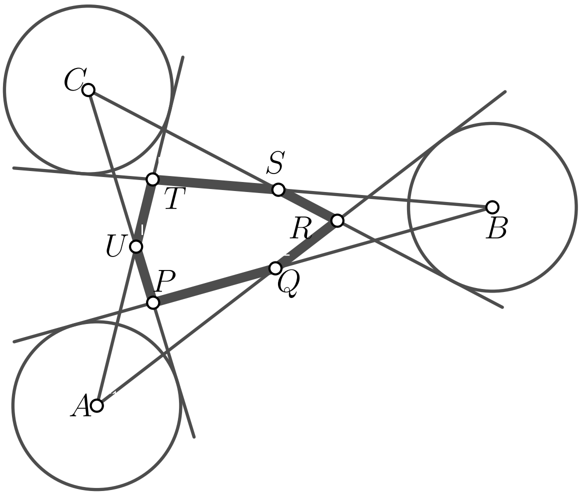
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

611214

Die Mittelpunkte A, B, C dreier kongruenter Kreise, die keine gemeinsamen Punkte haben, liegen nicht auf derselben Geraden. Von den Punkten A, B, C werden die sechs in Abbildung A 611214 gezeigten Tangenten an die Kreise gelegt, die ein konvexes Sechseck einschließen.

Man beweise: Die Summen der Längen von jeweils drei paarweise nicht unmittelbar benachbarten Seiten dieses Sechsecks sind gleich, d. h., es gilt

$$|PQ| + |RS| + |TU| = |QR| + |ST| + |UP| \ .$$



A 611214